UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA CALI

Método de Bisección

Sea $f(x)$ continua en un intervalo $[a,b]$ y supongamos que $f(a) < f(b)$. Entonces para cada z tal que $f(a) < z < f(b)$, existe un $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = z$.

La misma conclusión se obtiene para el caso que $f(a) > f(b)$. Básicamente el Teorema del Valor Intermedio nos dice que toda función continua en un intervalo cerrado, una vez que alcanzó ciertos valores en los extremos del intervalo, entonces debe alcanzar todos los valores intermedios.

En particular, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces un valor intermedio es precisamente $z = 0$, y por lo tanto, el Teorema del Valor Intermedio nos asegura que debe existir $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = 0$, es decir, debe haber *por lo menos* una raíz de $f(x)$ en el intervalo (a,b).

El método de bisección sigue los siguientes pasos:

Sea $f(x)$ continua:

i) Encontrar valores iniciales x_a, x_b tales que $f(x_a)$ y $f(x_b)$ tienen signos opuestos, es decir,

$$f(x_a) \cdot f(x_b) < 0$$

ii) La primera aproximación a la raíz se toma igual al punto medio entre x_a y x_b:

$$x_r = \frac{x_a + x_b}{2}$$

iii) Evaluar $f(x_r)$. Forzosamente debemos caer en uno de los siguientes casos:

- $f(x_a) \cdot f(x_r) < 0$

En este caso, tenemos que $f(x_a)$ y $f(x_r)$ tienen signos opuestos, y por lo tanto la raíz se encuentra en el intervalo $[x_a, x_r]$.

- $f(x_a) \cdot f(x_r) > 0$

En este caso, tenemos que $f(x_a)$ y $f(x_r)$ tienen el mismo signo, y de aquí que $f(x_r)$ y $f(x_b)$ tienen signos opuestos. Por lo tanto, la raíz se encuentra en el intervalo $[x_r, x_b]$.

- $f(x_a) \cdot f(x_r) = 0$

En este caso se tiene que $f(x_r) = 0$ y por lo tanto ya localizamos la raíz.
El proceso se vuelve a repetir con el nuevo intervalo, hasta que:

$$|\in_a| < \in_s$$

Es decir:

$$\left| \frac{x_{actual} - x_{previa}}{x_{actual}} \times 100\% \right| < \in_s$$