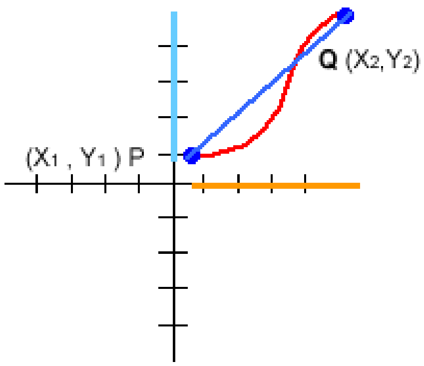
UNIVERSIDAD DE
SAN BUENAVENTURA
CALI

Derivación Numérica

Una derivada es la relación de cambio; un cambio en la función entre el cambio de la variable cuando ésta tiende a cero.

En cálculo, al cambio de valor en una variable se le llama incremento.

También en otras palabras se puede decir que la derivada es una tangente; una tangente es la pendiente de la recta que une a dos puntos.



En los cursos de cálculo se define la derivada de f en x_0 como.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Una manera razonable de aproximar la derivada es

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (1).$$

Para el caso de una función lineal, $f(x) = ax + b$, la aproximación dada por la expresión (1) resulta exacta para cualquier valor de h distinto de cero. Pero para cualquier función f en general no siempre resulta exacta.

A continuación se hace una estimación del error asociado a la aproximación dada por (1) usando el teorema de Taylor con un polinomio de grado 1.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(z)}{2}(x - x_0)^2, \qquad x_0 < z < x \qquad (2)$$

si $x = x_0 + h$, $x - x_0 = h$, y reemplazando en (2) resulta:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(z)}{2}h^2, \qquad x_0 < z < x_0 + h$$

si se despeja $f'(x_0)$ entonces:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f''(z)}{2}h, \qquad x_0 < z < x_0 + h \qquad (3).$$

Observe que la ecuación (3) es más útil que la ecuación (1), ya que tiene un término que cuantifica el error y este se conoce como término de error.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{: error } E = \left|\frac{f''(z)}{2}h\right|$$

Ejemplo.

Si se utiliza la fórmula (1) para calcular la derivada de $f(x) = \text{sen}(x)$ en $x = \frac{\pi}{4}$ y con $h = 0.01$. ¿Cuál es la respuesta y cuál es su grado de precisión o error?

Solución:

$f(x_0) = sen\ x$

$x_0 = \frac{\pi}{4}$, $h = 0.01$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{sen\left(\frac{\pi}{4} + 0.01\right) - sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{0.01} = 0.703559491$$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\text{sen}\, x$

$$E = \left|\frac{f''(z)}{2}h\right| = \left|\frac{sen(z)}{2}(0.01)\right| \le \frac{0.01}{2} = 0.005 \qquad (Porque\ |sen(z)| \le 1)$$

Se puede obtener una cota más precisa usando el hecho que $x_0 < z < x_0 + h$

$\frac{\pi}{4} < z < \frac{\pi}{4} + 0.01$ de modo que |sen z| < 0.714142376 y la cota sería

$$E = \left|\frac{\operatorname{sen} z}{2}(0.01)\right| < \frac{0.714142376}{2}(0.01) = 0.003570712$$

Observe que si $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f\,'(x) = \cos x$ y $f'(x_0) = f'(\pi/4) = \cos\frac{\pi}{4} = 0.707106781$

El error real es: 0.707106781 – 0.703559491 = 0.003547290186.

Se puede obtener otra fórmula para aproximar la derivada usando la ecuación (2),

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(z)}{2}(x-x_0)^2$$

si $x = x_0 - h$, $x - x_0 = -h$, reemplazando el valor de x se tiene:

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(z)}{2}h^2, \quad x_0 - h < z < x_0$$

si se despeja $f\,'(x_0)$ resulta:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \frac{f''(z)}{2}h$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \qquad E = \left|\frac{f''(z)}{2}h\right| \quad (4)$$

A la aproximación (1) se le llama fórmula de **diferencia hacia delante** y a la aproximación dada por (4) se le conoce como fórmula de **diferencia hacia atrás**, ambas fórmulas presentan el mismo error. Se puede obtener otra fórmula para aproximar la derivada con un error que involucre h^2 usando un polinomio de grado 2 así:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(z)}{6}(x - x_0)^3 \quad (5)$$

Si se reemplaza $x = x_0 + h$ y $x = x_0 - h$ en (5) resulta:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(z_1)}{6}h^3,\; x_0 < z_1 < x_0 + h$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 - \frac{f'''(z_2)}{6}h^3,\; x_0 - h < z_2 < x_0$$

Si se restan las anteriores ecuaciones, se tiene :

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2f'(x_0)h + \frac{1}{6}h^3(f'''(z_1) + f'''(z_2)),$$
$$x_0 - h < z_2 < x_0 < z_1 < x_0 + h$$

Ahora se despeja $f'(x_0)$,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{1}{6}h^2 f'''(z), \qquad x_0 - h < z < x_0 + h \qquad (6)$$ [1]

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \qquad E = \left|\frac{f'''(z)}{6}h^2\right|, \qquad x_0 - h < z < x_0 + h$$