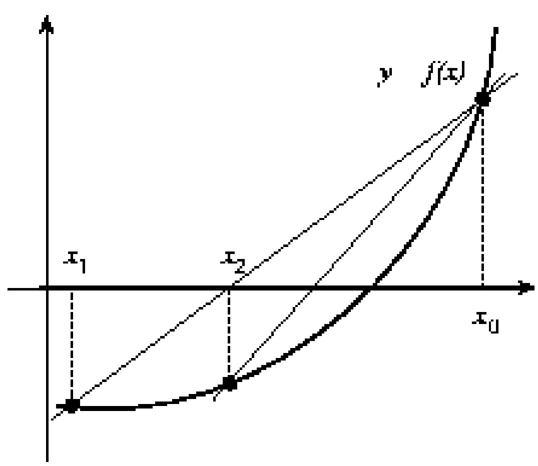
UNIVERSIDAD DE
SAN BUENAVENTURA
CALI

Método de Falsa Posición

El método de la falsa posición pretende conjugar la seguridad del método de la bisección con la rapidez del método de la secante.

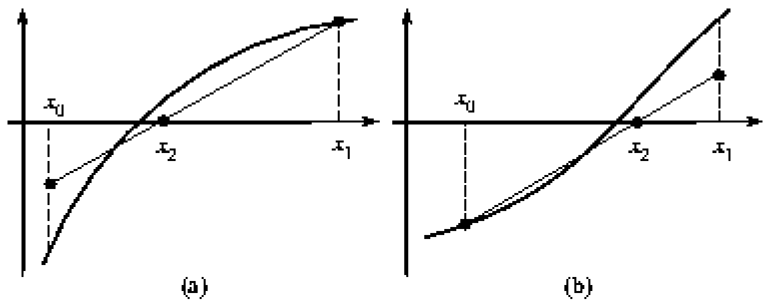
Este método, como en el método de la bisección, parte de dos puntos que rodean a la raíz $f(x) = 0$, es decir, dos puntos x_0 y $x_1$tales que $f(x_0)\ f(x_1) < 0$. La siguiente aproximación, x_2, se calcula como la intersección con el eje X de la recta que une ambos puntos (empleando la ecuación (35) del método de la secante).

La asignación del nuevo intervalo de búsqueda se realiza como en el método de la bisección: entre ambos intervalos, $[x_0, x2]$ y $[x_2, x1]$, se toma aquel que cumpla $f(x)f(x_2) < 0$. En la figura se representa geométricamente este método.



La elección *guiada* del intervalo representa una ventaja respecto al método de la secante ya que inhibe la posibilidad de una divergencia del método.

Por otra parte y respecto al método de la bisección, mejora notablemente la elección del intervalo (ya que no se limita a partir el intervalo por la mitad).



Sin embargo, el método de la falsa posición tiene una convergencia muy lenta hacia la solución. Efectivamente, una vez iniciado el proceso iterativo, uno de los extremos del intervalo tiende a no modificarse. Para obviar este problema, se ha propuesto una modificación del método, denominada método de Haming. Según este método, la aproximación a una raíz se encuentra a partir de la determinación del punto de intersección con el eje *X* de la recta que une los puntos ($x_0,f(x_0)/2$) y ($x_1,f(x_1)$) si la función es convexa en el intervalo o bien a partir de la recta que une los puntos ($x_0,f(x_0)$) y (x_1, $f(x_1)/2$) si la función es cóncava en el intervalo. En la figura se representa gráficamente el método de Hamming.

Como hemos comentado, el método de Hamming requiere determinar la concavidad o convexidad de la función en el intervalo de iteración. Un método relativamente sencillo para determinar la curvatura de la función consiste en evaluar la función en el punto medio del intervalo, $f(x_m)$ (en donde x_m se calcula como en el método de la bisección) y comparar este valor con la media de los valores de la función en los extremos del intervalo:

$$\overline{f} = (f(x_0) + f(x_1))/2$$

.

Tenemos entonces que:

$$f(x_m) \begin{cases} \leq \overline{f} & \text{si la función es cóncava} \\ \geq \overline{f} & \text{si la función es convexa} \end{cases}$$

Ejemplo:

Usar el método de la regla falsa para aproximar la raíz de $f(x) = e^{-x} - \ln x$, comenzando en el intervalo $[1,2]$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución

Este es el mismo ejemplo 1 del método de la bisección. Así pues, ya sabemos que $f(x)$ es continua en el intervalo dado y que toma signos opuestos en los extremos de dicho intervalo. Por lo tanto podemos aplicar el método de la regla falsa.

Calculamos la primera aproximación:

$$x_{r_1} = x_b - \frac{f(x_b)[x_a - x_b]}{f(x_a) - f(x_b)} = 2 - \frac{f(2)\cdot[1-2]}{f(1) - f(2)} = 1.397410482$$

Puesto que solamente tenemos una aproximación, debemos seguir con el proceso.

Así pues, evaluamos	$f(x_{r_1}) = e^{-1.397410482} - \ln(1.397410482 = -0.087384509 < 0$

Y hacemos nuestra tabla de signos:

$f(1)$	$f(1.397410482)$	$f(2)$
$+$	$-$	$-$

De donde vemos que la raíz se encuentra en el intervalo $[1, 1.397410482]$.

Con este nuevo intervalo, calculamos la nueva aproximación:

$$x_{r_2} = x_b - \frac{f(x_b)[x_a - x_b]}{f(x_a) - f(x_b)} = 1.397410482 - \frac{f(1.397410482)\cdot[1 - 1.397410482]}{f(1) - f(1.397410482)}$$

$$x_{r_2} = 1.321130513$$

En este momento, podemos calcular el primer error aproximado:

$$|\in_a| = \left| \frac{1.321130513 - 1.397410482}{1.321130513} \times 100\% \right| = 5.77\%$$

Puesto que no se cumple el objetivo seguimos con el proceso.

Evaluamos $f(x_{r_2}) = f(1.321130513) = -0.011654346 < 0$, y hacemos la tabla de signos:

$f(1)$	$f(1.397410482)$	$f(1.321130513)$
+	−	−

De donde vemos que la raíz se encuentra en el intervalo $[1, 1.321130513]$, con el cual, podemos calcular la nueva aproximación:

$$x_{r_3} = x_b - \frac{f(x_b)[x_a - x_b]}{f(x_a) - f(x_b)} = 1.321130513 - \frac{f(1.321130513) \cdot [1 - 1.321130513]}{f(1) - f(1.321130513)}$$

$$x_{r_3} = 1.311269556$$

Y el error aproximado:

$$|\in_a| = \left| \frac{1.311269556 - 1.321130513}{1.311269556} \times 100\% \right| = 0.75\%$$

Como se ha cumplido el objetivo, concluimos que la aproximación buscada es:

$$x_{r_3} = 1.311269556$$

UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA CALI