Octubre de 2016

# Relaciones

MARIA ALEJANDRA GUIO SAENZ
ALEJANDRO SALAZAR
ALEJANDRO BELTRAN
CAMILO RIVERA

SYGMA

## RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

Se dice que una relación R en un conjunto A es una relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Si dos elementos están relacionados por una relación de equivalencia entonces son equivalentes ya que la relación de equivalencia es simétrica. Además, toda relación de equivalencia es transitiva, esto quiere decir que si a y b son equivalentes y b y c también lo son, se entiende que a, b y c son equivalentes

**Ejemplo:**

Sea R la relación en el conjunto de los números reales tal que a R b si, y sólo si, a-b es un numero entero entonces ¿Es R una relación de equivalencia?

Como a – a = 0 es entero para cualquier número real a, a R a para todos los números reales a. Por lo tanto, R es reflexiva. Ahora supongamos que a R b. Entonces a – b es un numero entero, por lo que b – a es también un entero. Por tanto, b R a. Se sigue que R es simétrica, Si a R b y b R c, entonces a – b y b – c son enteros, por lo que a – c = (a-b) + (b-c) es también un entero. Por tanto, a R c y R es transitiva. En consecuencia, R es una relación de equivalencia

## Clases de equivalencia

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. El conjunto de todos los elementos que están relacionados con un elemento a de A se llama clase de equivalencia de a. La clase de equivalencia de a con respecto a R se denota por

$[a]_{g'}$. Si se considera una única relación, eliminaremos el subíndice R y escribiremos [a] para denotar la clase de equivalencia.

Clase de equivalencia y particiones

**Teorema 1** :

Sea R una relación en el conjunto A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. a R b
2. [a] = [b]
3. [a] ∩ [b] ≠ 0

Primero demostramos que (1) implica (2). Supongamos que a R b. Demostraremos que [a] = [b] demostrando que [a] c [b] y que [b] c [a]. Supongamos que c € [a]. Entonces a R c. Como a R b y R es simétrica, sabemos que b R a. Además, como R es transitiva con b Ra y a R c, se sigue que b R c. Por tanto, c € [b]. Esto demuestra que [a] c [b].

En segundo lugar, demostramos que (2) implica (3). Supongamos que [a] = [b]. Se sigue que [a] ∩ [b] ≠ 0 ya que [a] es no vacía (porque a € [a] al ser R reflexiva).

A continuación, demostramos que (3) implica (1). Supongamos que [a] ∩ [b] ≠ 0. Entonces, existe un elemento c con c € [a] y c € [b]. En otras palabras, a R c y b R c. Por la propiedad simétrica, c R b. Entonces, por transitividad, como a R c y c R b, se tiene que a R b.

Como (1) implica (2), (2) implica (3) y (3) implica (1), las tres afirmaciones (1),(2) y (3) son equivalentes

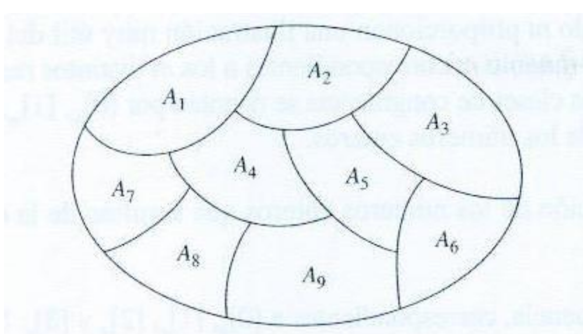


**Figura 1.** Una partición de un conjunto.

**Teorema 2**

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto S. Entonces, las clases de equivalencia de R forman una partición de S. Recíprocamente, dada una partición [$A_i$ l i € I) del conjunto S, hay una relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia son los conjuntos $A_i$ i € I.

**Ejemplo:**

Enumerar los pares ordenados de la relación de equivalencia R producida por la partición A1 = {1,2,3}, A2= {4,5} y A3={6} de S{ 1,2,3,4,5,6}

**Solución:**

Los subconjuntos de la partición son las clases de equivalencia de R. El par (a,b) € R si, y solo si, a y b están en el mismo subconjunto de la partición. Los pares (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2) y (3,3) pertenecen a R. puesto que $A_1$ = {1,2,3} es una clase de equivalencia, los pares (4,4), (4,5), (5,4) y (5,5) pertenecen a R, puesto que $A_2$ ={4,5} es una clase de equivalencia, y finalmente el par {6,6} pertenece a R, porque {6} es una clase de equivalencia. Ningún otro par, salvo los listados, pertenecen a R.