Octubre de 2016

Algebras Booleanas

MARIA ALEJANDRA GUIO SAENZ
ALEJANDRO SALAZAR
ALEJANDRO BELTRAN
CAMILO RIVERA

SYGMA

ALGEBRA DE BOOLE:

Área del conocimiento matemático sobre las cuales se sustentó el diseño y construcción de circuitos lógicos y digitales.

1) Axiomas del algebra de Boole:

Sea **B** un conjunto en el cual se han definido dos operaciones binarias, **+** y ***** (En algunos casos se definen en términos de $\vee$ y $\wedge$ respectivamente), y una operación unaria, denotada **'**. Entonces a la terna $\langle$**B, +, ***$\rangle$ se le denomina **Algebra Booleana** si se cumplen los siguientes axiomas o leyes:

B1) Leyes Conmutativas: Las dos operaciones son conmutativas si para todos los elementos $x, y \in$ B, se cumple que:

1A) $x + y = y + x$ **1B)** $x * y = y * x$

B2) Leyes Distributivas: Cada operación es distributiva con respecto a la otra si para todos los elementos $x, y, z \in$ B, se cumple que:

2A) $x + (y * z) = (x + y) * (x + z)$ **2B)** $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$

B3) Leyes Modulativas: Cada operación binaria es modulativa y los módulos son diferentes para todo $x \in$ B, existen dos elementos diferentes 0 y 1 en B tales que:

3A) $x + 0 = 0 + x = x$ **3B)** $x * 1 = 1 * x = x$

B4) Leyes de Complemento: Para todo elemento $x \in$ B existe un elemento $x' \in$ B tal que:

4A) $x + x' = 1$ **4B)** $x * x' = 0$

2) Ejemplos de estructuras booleanas:

Sea el conjunto **B = {0,1}** en el cual se definen las operaciones **+** y ***** de acuerdo a las siguientes tablas:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Nota: Observé la relación de estas tablas con las tablas de la disyunción y conjunción, y la relación de los complementos con la negación de una proposición.

Supongamos que los complementos se definen por **1' ≡ 0 y 0' ≡ 1.** Demostrar que ⟨**B, +, *, '**⟩ es un algebra booleana, mostrando que satisfacen los axiomas **B1 y B4.**

B1) Las leyes conmutativas de las operaciones **+** y ***** se evidencian en la simetría de la matriz de resultados en ambas tablas.

B2) Establecer la distributividad de cada una de las operaciones con respecto a la otra exige calcular el resultado de ocho combinaciones posibles en cada caso.

Para **2A)** $x + (y * z) = (x + y) * (x + z)$:

				A			B
x	y	z	$y * z$	$x + (y * z)$	$x + y$	$x + z$	$(x + y) * (x + z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Observe que las columnas **A** y **B** son iguales

Para la forma **2B)** $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$

				A			B
x	y	z	$y + z$	$x * (y + z)$	$x * y$	$x * z$	$(x * y) + (x * z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Observe que las columnas **A** y **B** son iguales

B3) En la tabla de la operación + es fácil observar que 0 es el módulo de esta operación y en la tabla de * análogamente se puede ver que 1 es el módulo; en efecto:

0 + 0 = 0; **1 + 0 = 1** y **0 * 1 = 0;** **1 * 1 = 1.**

B4) Se han definido **1' = 0** y **0' = 1**, de esta manera se puede observar que para cada elemento de B existe un complemento tal que:

0 + 0' = 0 + 1 = 1 y **1 + 1' = 1 + 0 = 1**

0 * 0' = 0 * 1 = 0 y **1 * 1' = 1 * 0 = 0**

De esta manera se ha demostrado que **⟨B, +, *, '⟩** es una Algebra Booleana.

3) Expresiones Booleanas

TEOREMA 1. Leyes de Idempotencia: Todo elemento de un Álgebra Booleana es i dempotente, si para todo elemento x ∈ B; se cumple que:

5A) $x + x = x$ y **5B)** $x * x = x$.

Demostración de **5A**:

$x + x = (x + x) * 1$	B3 (Ley modulativa)
$= (x + x) * (x + x')$	B4 (Ley de complemento)
$= x + (x * x')$	B2 (Ley distributiva)
$= x + 0$	B4 (Ley de complemento)
$= x$	B3 (Ley modulativa)

Demostración de **5B**:

$x * x = (x * x) + 0$	B3 (Ley modulativa)
$= (x * x) + (x * x')$	B4 (Ley de complemento)
$= x * (x + x')$	B2 (Ley distributiva)
$= x * 1$	B4 (Ley de complemento)
$= x$	B3 (Ley modulativa)

DEFINICION DE DUAL. El dual de una expresión E de un Álgebra Booleana, es la expresión que resulta a partir del intercambio de **+** por ***** y **0** por **1** y recíprocamente, en cada operación de estos símbolos.

Ejemplo ilustrativo:

1. Sea la expresión $E_1 = x + y * (z + 1)$,

   el dual es la expresión $E_1^d = x * (y + z * 0)$.

2. Dada la ecuación $E_2 = x + xz' = x$,

   su dual es la ecuación $E_2^d = x * (x + z') = x$

PRINCIPIO DE LA DUALIDAD. Si el teorema T es deducible de los axiomas de un Algebra de Boole, entonces el dual de T, que se denota por T^d, es también deducible y para deducirlo basta cambiar cada expresión surgida en la demostración de T, por su dual.

Observe la demostración del Teorema 1, realizada anteriormente, la demostración de **5B** se obtiene a partir de **5A**, realizando los cambios respectivos previstos + por * y 1 por 0, y recíprocamente. **5B** es el T^d de **5A**.

B6) TEOREMA 2. Leyes de acotamiento. Para todo $x \in$ B, se verifica que:

6A) $x + 1 = 1$ y **6B)** $x * 0 = 0$.

***Demostración*:**

Demostración de **6A**:

$x + 1 = 1 * (x + 1)$	B3 (Ley modulativa)
$= (x + x') * (x + 1)$	B4 (Ley de complemento)
$= x + (x' * 1)$	B2 (Ley distributiva)
$= x + x'$	B3 (Ley modulativa)
$= 1$	B4 (Ley de complemento)

La demostración de **6B** $x * 0 = 0$ se omite, ya que por el principio de la dualidad se puede deducir de manera análoga tomando el dual en cada paso de la demostración de **6A** (el lector puede demostrarlo).

B7) TEOREMA 3. Leyes de absorción. Para todo $x, y \in$ B, se verifica que:

7A) $x + (x * y) = x$ y **7B)** $x * (x + y) = x$.

***Demostración*:**

Demostración de **7A**:

$x + (x * y) = x * 1 + (x * y)$	B3 (Ley modulativa)
$= x * (1 + y)$	B2 (Ley distributiva)
$= x * (y + 1)$	B1 (Ley conmutativa)
$= x * 1$	B6 (Teorema 2: Ley de acotamiento)
$= x$	B3 (Ley modulativa)

La parte **7B** se da por demostrada por el principio del dualismo (el lector puede demostrarlo)

B8) TEOREMA 4. Unicidad del complemento. Para cada $x \in$ B, siendo B un Algebra de Boole, el complemento de x, denotado por x', es único.

***Demostración*:** La demostración se hará por contradicción.

Supongamos que $x \in$ B tiene dos complementos diferentes y y z, es decir, con $y \neq z$, entonces satisfacen las condiciones del axioma **B4**: por **4A)** $x + y = 1$ (2) y $x + z = 1$ (3), y por **4B)** $x * y = 0$ (4) y $x * z = 0$ (1)

$y = y + 0$	B3
$y = y + (x * z)$	Sustitución de (1) en 0
$y = (y + x) * (y + z)$	B2
$= (x + y) * (y + z)$	B1
$= 1 * (y + z)$	Sustitución de (2)
$= (x + z) * (y + z)$	Sustitución de (3)
$= (x * y) + z$	B2
$= 0 + z$	Sustitución de (4)
$= z$	B3

Entonces $y = z$. Lo cual es una contradicción (contradice la condición de la hipótesis $y \neq z$).

B9) TEOREMA 5. Leyes de D'Morgan. Para todo $x, y \in$ B, se verifica que:

8A) $(x + y)' = x' * y'$ y **8B)** $(x * y)' = x' + y'$.

Demostración:

Demostración de **8A)**: Mostraremos que $x' * y'$ satisface las condiciones que caracterizan el complemento de $(x + y)$, que es único.

1º) $(x + y) + (x' * y') = (x + y + x') * (x + y + y')$	B2
$= (x + x' + y) * (x + y + y')$	B1
$= (1 + y) * (x + 1)$	B4
$= 1 * 1$	B6: Teorema 2
$= 1$	B3

2º) $(x + y) * (x' * y') = x * (x' * y') + y * (x' * y')$	B2
$= (x * x')\, y' + (y * y')\, x'$	B1 y Propiedad asociativa
$= 0 * y' + 0 * x'$	B4
$= 0 + 0$	B6: Teorema 2
$= 0$	B3

En conclusión $(x + y)' = x' * y'$.

Por el principio del dualismo **8B** se da por demostrado (el lector puede comprobarlo).

B10) TEOREMA 6. Leyes asociativas. Para todo $x, y, z \in B$, se verifica que:

9A) $(x + y) + z = x + (y + z)$ y **9B**) $(x * y) * z = x * (y * z)$

***Demostración*:**

Demostraremos **9B)**: Sea L = $(x * y) * z$ y R = $x * (y * z)$; entonces tenemos que demostrar que L = R. Primero demostraremos que x + L = x + R.

$$x + L = x + [(x * y) * z]$$
$$= [x + (x * y)] * (x + z)$$
$$= x * (x + x)$$
$$= x$$

$$x + R = x + [x * (y * z)]$$
$$= (x + x) * (x + (y * z)]$$
$$= x * [x + (y * z)$$
$$= x$$

Así, x + L = x + R.

Ahora demostremos que x' + L = x' + R.

$$x' + L = x' + [(x * y) * z]$$
$$= [x' + (x * y) * (x' + z)$$
$$= [(x' + x) * (x' + y') * (x' + z)]$$
$$=[1 * (x' + y) * (x' + z)$$
$$=(x' + y) * (x' + z)$$
$$= x' + (y * z)$$

$$x' + R = x' + [x * (y * z)]$$
$$= (x' + x) * [x' + (y * z)]$$
$$= 1 * [x' + (y * z)]$$
$$= x' + (y * z)$$

De donde $x' + L = x' + R$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} L &= L + 0 = L + (x * x') \\ &= (L + x) * (L + x') \\ &= (x + L) * (x' + L) \\ &= (x + R) * (x' + R) \\ &= (R + x) * (R + x') \\ &= R + (x * x') = R + 0 = R \end{aligned}$$

Por el principio de dualismo **9A** se da por demostrado.

B11) TEOREMA 7. Ley de involución. Para cada $x \in B$, $(x')' = x$.

B12) TEOREMA 8. Leyes para el 0 y el 1. $0' = 1$ y $1' = 0$.